Φυλλάδιο [illegible] (Απειροστικός Λογισμός ΙΙ)

1. Δίνεται $f:[0,1]\to R$ ολοκληρώσιμη ώστε $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[0,1]$ και $\int_0^1 f = 1$. Δείξτε ότι για κάθε $n\in N$ υπάρχει διαμέριση $P_n=\{0=t_0<t_1<\dots<t_{n-1}<t_n=1\}$ του $[0,1]$, ώστε $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f = \frac{1}{n}$ για κάθε $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$

2. Δείξτε ότι αν $f:[0,1]\to R$ συνεχής ώστε $\int_0^x f = \int_x^1 f$, για κάθε $x\in[0,1]$, τότε η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

3. Δίνονται $f,h:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ συναρτήσεις, ώστε η h να είναι συνεχής και η f παραγωγίσιμη και η συνάρτηση F με τύπο $F(x)=\int_0^{f(x)} h(t)dt$. Δείξτε ότι η F είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα $F'(x)=h(f(x))f'(x)$.

4. Δίνεται $f:R\to R$ συνεχής και $\delta>0$ και η g με τύπο $g(x)=\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt$. Δείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη και βρείτε την παράγωγό της.

5. Δίνεται $f:[1,+\infty)\to R$ συνεχής και η F με τύπο $F(x)=\int_1^x f(\frac{x}{t})dt$. Δείξτε ότι η F είναι παραγωγίσιμη και βρείτε την παράγωγό της.

6. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα :

α) $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$, β) $\int \cos^2(x)dx$, γ) $\int \cos^3(x)\sin^4(x)dx$, δ) $\int x\cos(x)dx$

7. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα :

α) $\int x^2\sin(x)dx$, β) $\int \log(x+\sqrt{x})dx$, γ) $\int x\sin^2(x)dx$

8. Αν $I_k=\int \frac{dy}{(y^2+1)^k}$, $k\in N$, $k\ge 1$, αποδείξτε ότι $I_{k+1}=\frac{1}{2k}\frac{y}{(y^2+1)^k}+\frac{2k-1}{2k}I_k$

9. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα :

α) $\int \frac{3x^2+6}{x^3+x^2-2x}dx$, β) $\int \frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4}dx$, γ) $\int \frac{x+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}dx$

10. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα απειρίζονται θετικά :

α) $\int_1^{\infty} x^3 dx$, β) $\int_0^1 \frac{1}{x^3}dx$, γ) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$

11. Υπολογίστε τα γενικευμένα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$, β) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, γ) $\int_0^1 \log x dx$.

12. Αποδείξτε ότι $\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx = n!$, για κάθε $n\in N$ (Υπόδ: Χρησιμοποιήστε επαγωγή)